

Ex.14 证明. 考虑齐次线性方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0.$$

因为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示, 所以,

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leq \text{rank}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) \leq t \stackrel{\text{(条件)}}{<} s.$$

于是, 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 有非零解, 所以, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关.